Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

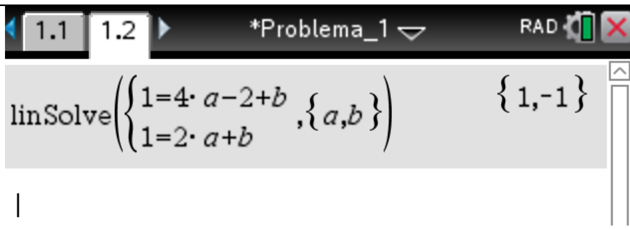
Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 1 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T^3 Italia - Teachers Teaching with Technology

Punto 1

La funzione $f(x)$ ha per grafico una parabola. Esaminiamo la funzione $g(x) = (ax+b)e^{2x-x^2}$.

La funzione $g(x)$, definita su **R**, tende a zero per x tendente a $\pm\infty$.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$
La funzione $g(x)$ ammette un unico zero in $x = -\frac{b}{a}$ ed è positiva a destra e negativa a sinistra di tale zero; se in queste due regioni troviamo rispettivamente un minimo e un massimo relativi, questi saranno anche minimo e massimo assoluti. Si ha $$g'(x) = e^{2x-x^2}(-2ax^2 + 2(a-b)x + 2b + a)$$	
Scriviamo l'equazione $g'(x) = 0$, dopo aver semplificato per l'esponenziale:	$a + (ax+b)(2-2x) = 0$ $-2ax^2 + 2(a-b)x + 2b + a = 0$
Calcoliamo il discriminante dell'equazione trovata e troviamo un valore positivo per ogni scelta dei parametri a e b. L'equazione $g'(x) = 0$ ammette quindi sempre due soluzioni, ovvero $g(x)$ ha due punti stazionari, massimo e minimo relativi, che sono anche assoluti considerato l'andamento asintotico della funzione.	$\frac{\Delta}{4} = (a-b)^2 + 2a(2b+a) =$ $= 3a^2 + 2ab + b^2 =$ $= 2a^2 + (a+b)^2 > 0$
Risolviamo in una pagina di calcolo della calcolatrice (TI-Nspire CX) il sistema con le condizioni di passaggio per il punto A per trovare i valori richiesti dei parametri: $a = 1$ e $b = -1$.	

Punto 2

In base al punto precedente, otteniamo quindi che $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$.

Per verificare che il grafico di $g(x)$ ha il centro di simmetria nel punto $B(0,-1)$, trasliamo la curva di 1 verso "sinistra". Si ottiene

$$y = g(x+1)$$

Sostituendo ed eseguendo i calcoli otteniamo

$$y = g(x+1) = (x+1-1)e^{2(x+1)-(x+1)^2}$$

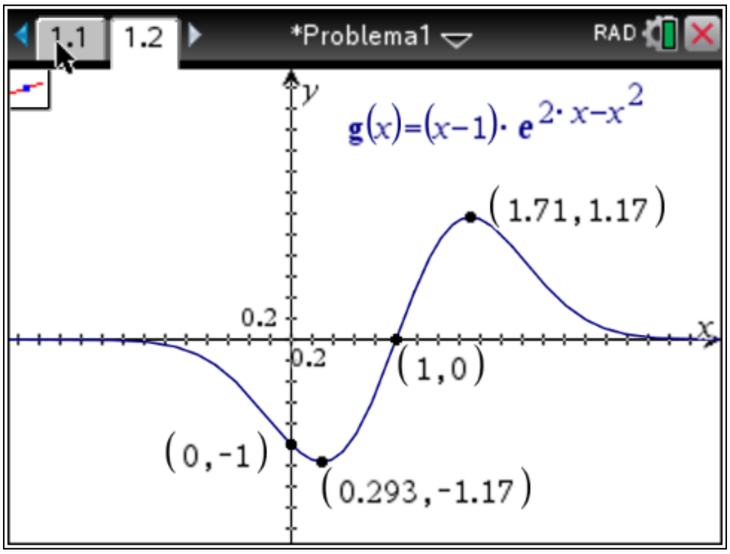
ovvero $y = x\,e^{1-x^2}$, che è una funzione dispari.

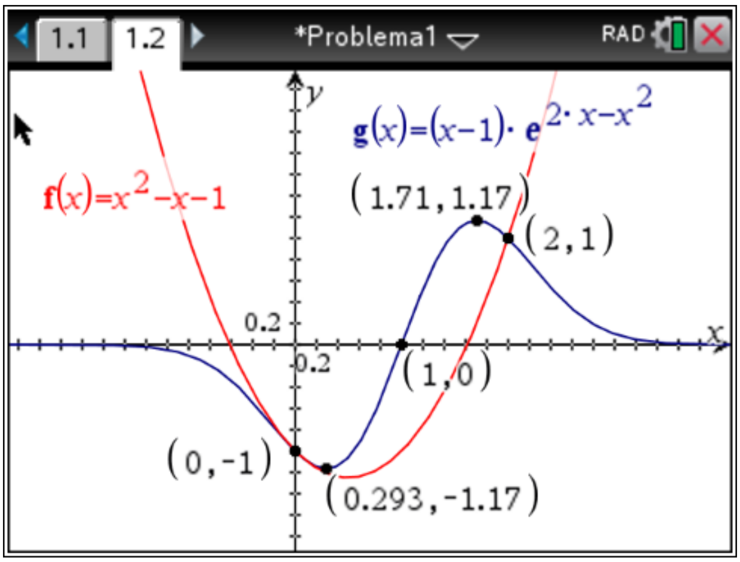
Si ha $f'(x) = 2x - 1$ e $g'(x) = -e^{2x-x^2}(2x^2 - 4x + 1)$.

Entrambe le funzioni passano per il punto $B(0,-1)$ e inoltre $f'(0) = -1$ e $g'(0) = -1$.

Quindi le due funzioni hanno la stessa retta tangente nel punto $B(0,-1)$ e l'equazione della retta tangente è $y = -x - 1$.

La funzione $g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$ ha quindi i punti estremanti in $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo (che è anche assoluto) e per $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha un massimo relativo (assoluto). Il minimo e il max valgono: $g\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{e}{2}} \approx \pm 1{,}17$.





Per il calcolo dell'area compresa tra le due curve occorre calcolare il seguente integrale definito:

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x))\, dx$$

Si ottiene

$$A = \int_0^2 \left((x-1)e^{2x-x^2} - (x^2 - x - 1)\right) dx$$

Dopo alcuni calcoli si ha $A = \frac{4}{3}$.

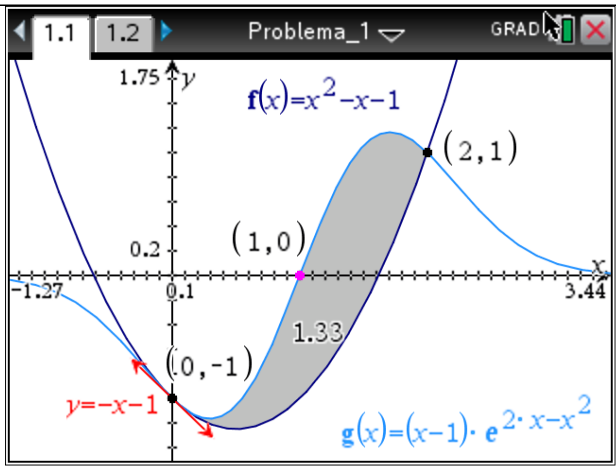
Il calcolo di quest'area diventa più semplice traslando le curve di 1 verso sinistra. Si ottengono le funzioni: $y = x^2 + x - 1$ e $y = x\, e^{1-x^2}$. Si ha quindi

$$A = \int_{-1}^{1} \left(xe^{1-x^2} - (x^2 + x - 1)\right) dx =$$

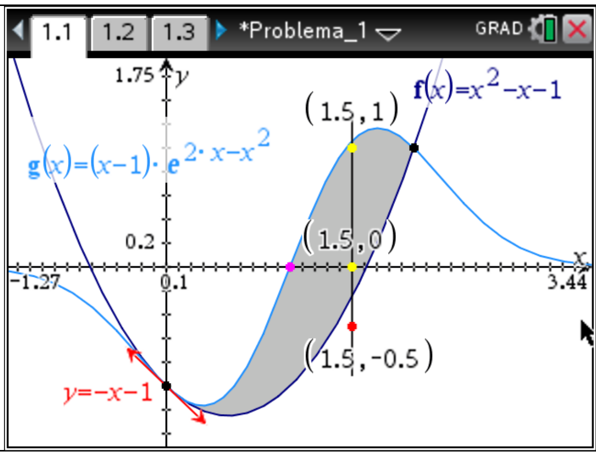
$$A = \int_{-1}^{1} \left(xe^{1-x^2}\right) dx - \int_{-1}^{1} (x^2 + x - 1)\, dx =$$

(il primo integrale è nullo perché applicato a una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine)

$$A = 0 - \int_{-1}^{1} (x^2 + x - 1)\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

<table>
<tr>
<td>Visualizziamo i grafici delle due funzioni in una finestra grafica (della calcolatrice TI-Nspire CX) e verifichiamo tutte le caratteristiche chieste dal problema:
1) il grafico di $g(x)$ presenta una simmetria rispetto al punto (1,0)
2) i grafici di f e g ammettono una tangente in comune nel punto B, di equazione $y = -x - 1$.
3) L'area delimitata dai due grafici tra i punti $B(0,-1)$ e $A(2,1)$ misura 4/3; la calcolatrice visualizza il valore approssimato 1.33.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Il calcolo dell'integrale definito nella scheda di calcolo ci conferma il valore visualizzato in precedenza.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Punto 3

Posizioniamo con “Geometria->Punti su” i tre punti del testo e verifichiamo che tra questi solo P_3 non cade all’interno del contorno della regione S.	
Applichiamo il teorema di Ampère sul contorno di S per valutare la circuitazione del campo magnetico. 1) La corrente i_3 non influisce sulla circuitazione essendo escluso dal cammino S; 2) Se $i_2 < 2$ A la circuitazione è negativa e il campo magnetico ruota in senso orario rispetto al piano cartesiano. 3) Se $i_2 = 2$ A la circuitazione è nulla. 4) Se $i_2 > 2$ A la circuitazione è positiva e il campo magnetico ruota in senso antiorario rispetto al piano cartesiano.	La circuitazione del campo magnetico calcolata lungo la linea chiusa $\mathcal{L}$, contorno della regione S, è data da: $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0\,(i_2 - i_1)$ $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0\,(i_2 - 2\text{ A})$

Punto 4

Calcoliamo l’espressione della corrente indotta ponendo $\alpha(t) = \omega t$ l’angolo che la direzione normale alla superficie S forma con il campo magnetico:	$i(t) = \frac{fem}{R} = -\frac{SB}{R}\frac{dcos(\omega t)}{dt} = \frac{SB\omega}{R}sin(\omega t)$
Identifichiamo il valore massimo della corrente indotta:	$i_{max} = \frac{SB\omega}{R}$
Ricaviamo ω:	$\omega = \frac{Ri_{max}}{SB} = \frac{(0{,}20\ \Omega)\cdot(5\cdot 10^{-3}\text{ A})}{(1{,}33\ \text{m}^2)\cdot(1{,}5\cdot 10^{-2}\text{ T})} = 0{,}05\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Commento sul problema 1

Il problema ha un livello di difficoltà medio/alto. Si tratta di un problema che parte dalla Matematica (primi due punti) e poi arriva alla Fisica. I temi trattati sono presenti sia nel Quadro di Riferimento di Matematica che in quello di Fisica.

Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti e osservarne le proprietà. Occorreva comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti (perché le calcolatrici permesse sono non-CAS).