Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 4 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T^3 Italia - Teachers Teaching with Technology

Soluzione

Una funzione razionale che soddisfa alle ipotesi deve avere il fattore $(x+1)$ almeno con molteplicità 1 e il fattore $(x-2)$ almeno con molteplicità 2 del polinomio $s(x)$ al numeratore. Analogamente, il polinomio $t(x)$ al denominatore deve contenere il fattore $(x-1)$ e il fattore $(x+3)$ ciascuno almeno con molteplicità 1. La funzione razionale più semplice che soddisfa queste richieste è la seguente:

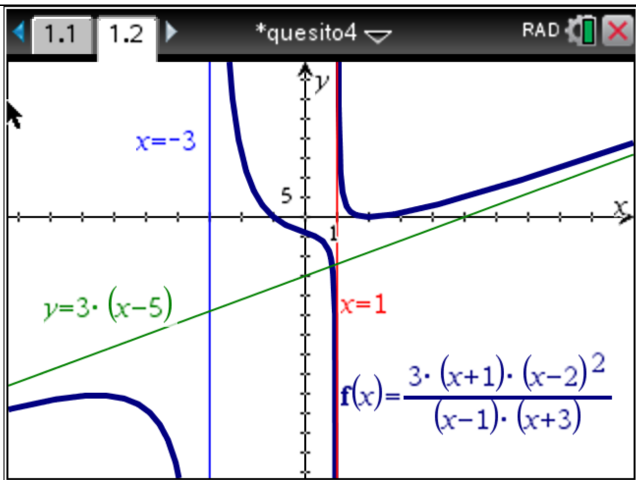
$$f(x)=\frac{a(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$$

dove a è una costante reale.
Imponendo il passaggio per il punto (7, 10), si ottiene: $f(7)=10$.

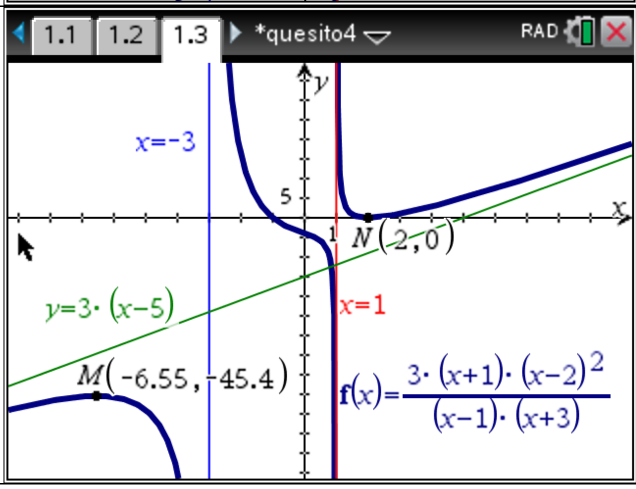
Si ha quindi $\frac{a\cdot 8\cdot 5^2}{6\cdot 10}=10$, da cui si ricava $a=3$. <u>Una</u> funzione quindi che soddisfa alle ipotesi è la seguente:

$$f(x)=\frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$$

Con la calcolatrice grafica è immediato tracciare il grafico della funzione $f(x)$.
Questa funzione ha un minimo relativo nel punto (2;0) e un massimo relativo che si può solo trovare in modo approssimato.
Gli asintoti verticali, in base alle ipotesi, sono le rette di equazione $x=-3$ e $x=1$.
La funzione ha per asintoto obliquo la retta di equazione $y=3(x-5)$.



La funzione $f(x)$ ha un minimo relativo nel punto (2;0) e un massimo relativo nel punto (-6.55; -45.4) che si possono facilmente trovare con l'uso della calcolatrice, usando nell'ambiente *Grafici* rispettivamente *Menu>Analizza grafico>Massimo* e *Menu>Analizza grafico>Minimo*.



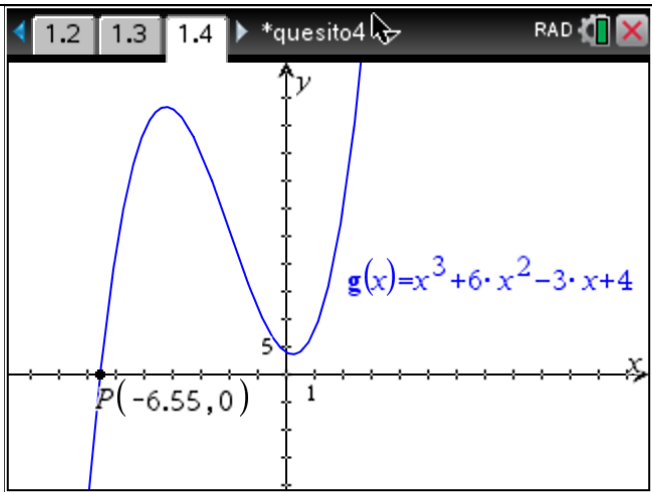
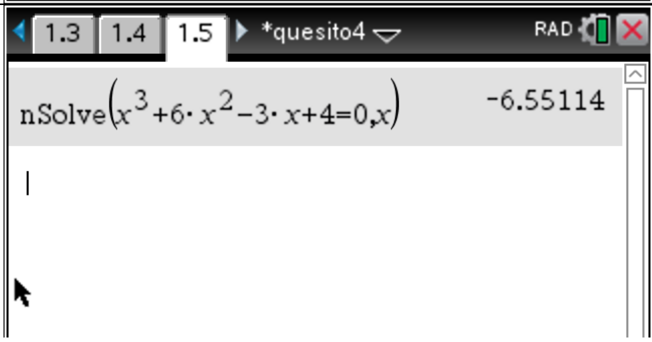
Per motivare quanto abbiamo anticipato con l'uso della calcolatrice grafica, eseguiamo la divisione tra il numeratore e il denominatore. Si trova:

$$\frac{3\left(x^3-3x^2+4\right)}{x^2+2x-3}=3\left(x-5+\frac{13x-11}{x^2+2x-3}\right).$$

Quindi la funzione $f(x)$ ha per asintoto obliquo la retta di equazione: $y=3(x-5)$.
Per giustificare la presenza dei massimi e dei minimi, già determinati con l'uso della calcolatrice grafica, occorre ricavare la derivata prima:

$$f'(x)=3\frac{(x-2)\left(x^3+6x^2-3x+4\right)}{(x-1)^2(x+3)^2}$$

La derivata prima si annulla per $x=2$ (punto di minimo relativo) e in $x=-6,55...$ (punto di massimo relativo). Per trovare lo zero approssimato $x=-6,55...$ occorre studiare la funzione $g(x)=x^3+6x^2-3x+4$ presente al numeratore.

<table>
<tr>
<td>La funzione $g(x)=x^3+6x^2-3x+4$ è una cubica con un solo zero reale, che si può facilmente trovare con l'uso della calcolatrice grafica.
Il grafico della funzione
$$g(x)=x^3+6x^2-3x+4$$
è riportato qui a fianco.
Lo zero approssimato vale circa $x=-6.55...$ e si trova con la calcolatrice.
In tale punto di ascissa $x=-6.55...$ la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lo zero approssimato si può anche determinare con la calcolatrice in una pagina di tipo Calcola, come si vede qui a fianco.
Si aggiunge una pagina Calcola.
Si preme Menu>Algebra>Risolutore numerico.
Compare nSolve( ), che significa "numeric solve".
Si scrive tra parentesi l'equazione da risolvere numericamente, seguita dalla variabile rispetto alla quale si vuole risolvere.
Si ottiene circa x = -6.55114.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Giudizio sul quesito

Il livello di difficoltà stimato del quesito è alto.

L'argomento è presente nel Quadro di Riferimento di Matematica e di solito viene svolto nella pratica didattica usuale.

Per la risoluzione del problema è molto utile usare una calcolatrice grafica perché il grafico della funzione si ottiene dopo un procedimento lungo e laborioso. La derivata prima possiede anche uno zero da determinare in modo approssimato e con la calcolatrice grafica è pressoché immediato da trovare.