

Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

PROBLEMA 1 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology

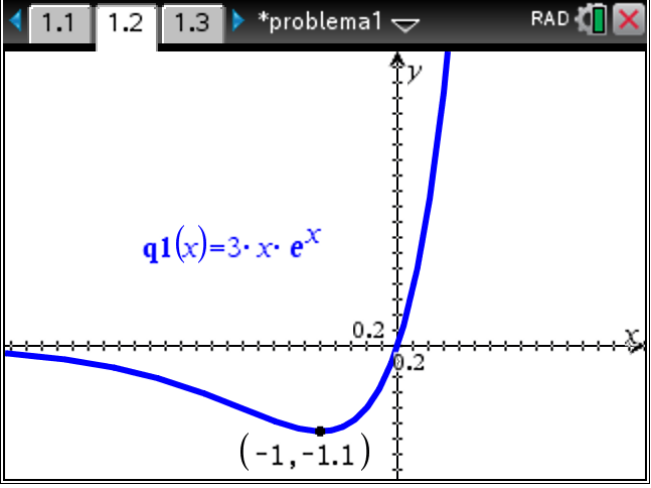
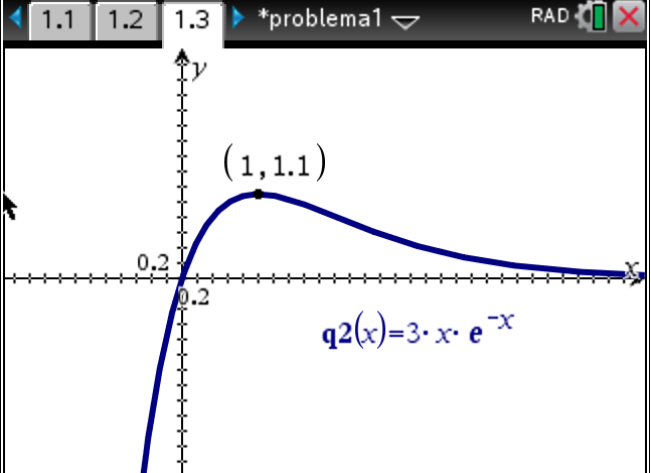
Punto 1

Poiché $a > 0$, possiamo esaminare due casi: $b > 0$ oppure $b < 0$.

La derivata prima della funzione $q(t) = a t e^{bt}$ è data da

$$q'(t) = a(e^{bt} + bt e^{bt}) = a e^{bt} (1 + bt)$$

Nella calcolatrice la variabile indipendente sarà indicata con x invece che con t (essendo t un simbolo riservato per le equazioni parametriche).

<p>Se $b > 0$ la derivata prima $q'(t) = a e^{bt} (1 + bt)$ è positiva per $t \geq -\frac{1}{b}$ e la funzione $q(t)$ ha un minimo relativo (e assoluto) per $t = -\frac{1}{b}$.</p> <p>Nel grafico a fianco abbiamo posto, per esempio, $a = 3$ e $b = 1$. La funzione ha un minimo nel punto di ascissa $x = -1$, che la calcolatrice è in grado di determinare in modo numerico.</p>	
<p>Se $b < 0$ la funzione $q(t)$ ha un massimo relativo (e assoluto) per $t = -\frac{1}{b}$.</p> <p>Nella figura a fianco si ha, per esempio, $a = 3$ e $b = -1$. La funzione ha un massimo nel punto di ascissa $x = 1$, che la calcolatrice è in grado di determinare in modo numerico.</p>	

Imponiamo che il massimo della funzione sia il punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} q(2) = \frac{8}{e} \\ q'(2) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2a e^{2b} = \frac{8}{e} \\ a e^{2b} (1 + 2b) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i valori $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$.

Punto 2

La funzione diventa pertanto $q(t) = 4te^{-\frac{t}{2}}$.

La derivata prima è

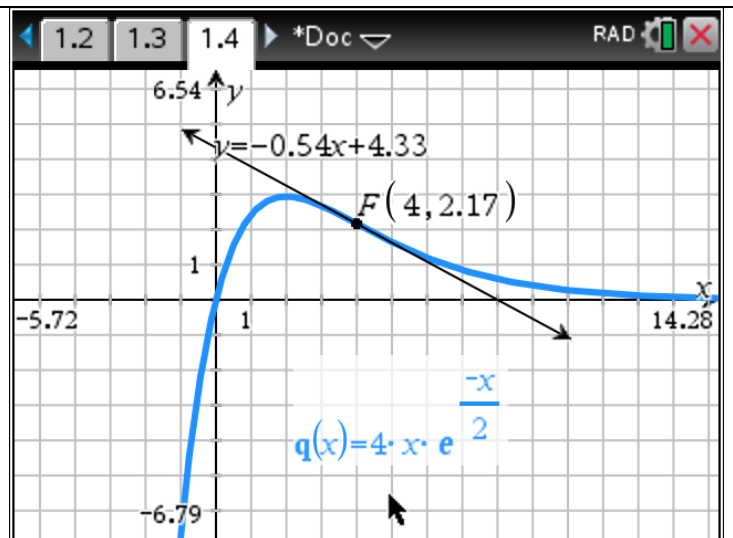
$$\frac{dq}{dt} = q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 2e^{-\frac{t}{2}}(2-t).$$

La derivata seconda è:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = q''(t) = 4 \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \right) = -2e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2} + 1\right) = e^{-\frac{t}{2}}(t-4)$$

Il flesso ascendente è il punto $F\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$.

Il grafico della funzione $q(t)$ è quello riportato a fianco. La variabile indipendente è stata indicata con x . Abbiamo anche disegnato la retta tangente nel punto di flesso. La calcolatrice, ovviamente, essendo “non CAS”, visualizza l’equazione della tangente di flesso in modo approssimato: $y = -0.54x + 4.33$.



La retta tangente in F , nel piano Oty ha equazione $y - \frac{16}{e^2} = -\frac{4}{e^2}(t-4)$, cioè in modo approssimato (e indicando x invece di t) $y = -0.54x + 4.33$.

Punto 3

La costante b ha le dimensioni di un tempo alla -1, e si misura quindi in s^{-1} .

Se $q(t)$ rappresenta una carica, la costante a ha le dimensioni di una carica per un tempo alla -1: si misura quindi in Cs^{-1} , cioè in ampere (A).

Nel testo, la definizione, come grandezza fisica, della funzione $q(t)$ non è chiara. Assumiamo che $q(t)$ sia una carica e che dq sia la carica elettrica infinitesima che fluisce attraverso la sezione di un conduttore nell’intervallo di tempo infinitesimo dt . Si ha quindi $\frac{dq}{dt} = i(t)$. Pertanto $q(t) = \int_0^t i(t) dt$ e quindi $q(t)$ è la quantità di carica che ha attraversato una sezione del conduttore nell’intervallo di tempo $[0, t]$. La derivata di $q(t)$ è pertanto l’intensità di corrente istantanea.

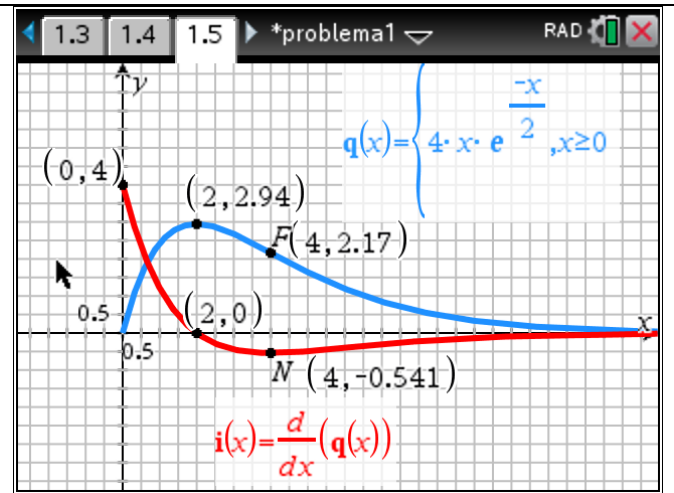
Il grafico dell'intensità di corrente è riportato in rosso nel grafico a fianco e al crescere del tempo l'intensità di corrente tende a zero (per valori negativi).

Il minimo della corrente si ha per $t = 4$ s e vale

$$i_{\min} = -\frac{4}{e^2} \approx -0.541 \text{ A}$$

Il massimo si ha per $t = 0$ s e vale 4 A.

La calcolatrice è in grado di determinare sia il massimo che il minimo (in modo approssimato).



Si ha inoltre (ma la calcolatrice non può svolgere questo calcolo simbolico):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2-t}{e^{\frac{t}{2}}} = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

Punto 4

Probabilmente il testo chiedeva di calcolare il seguente integrale (la formulazione del quesito è ambigua).

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t) dt = \int_0^{t_0} q'(t) dt = [q(t)]_0^{t_0} = 4t_0 e^{-\frac{t_0}{2}}$$

Si ha

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} Q_0 = \int_0^{+\infty} i(t) dt = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \left(4t_0 e^{-\frac{t_0}{2}}\right) = 4 \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{t_0}{e^{\frac{t_0}{2}}}\right) = 4 \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}e^{\frac{t_0}{2}}}\right) = 0$$

L'energia dissipata per effetto Joule nel circuito nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$ è data da

$$W = \int_0^{t_0} Ri^2 dt = \int_0^{t_0} R(q'(t))^2 dt = 3 \int_0^{t_0} \left(2e^{-\frac{t}{2}}(2-t)\right)^2 dt = 12 \int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2 dt$$

che lasciamo indicato (come richiesto dal testo).

Giudizio sul problema

Il problema ha un livello di difficoltà alto. Si tratta di un problema che parte dalla Matematica (primi due punti) e poi arriva alla Fisica. È quindi parzialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel Quadro di Riferimento di Matematica che in quello di Fisica. Si nota un'ambiguità di formulazione nel punto 3, nella definizione della funzione $q(t)$, e anche nel punto 4 sulla definizione di $Q(t_0)$.

Per la risoluzione è di molto aiuto utilizzare la calcolatrice grafica perché si possono tracciare immediatamente i vari grafici richiesti. Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti.