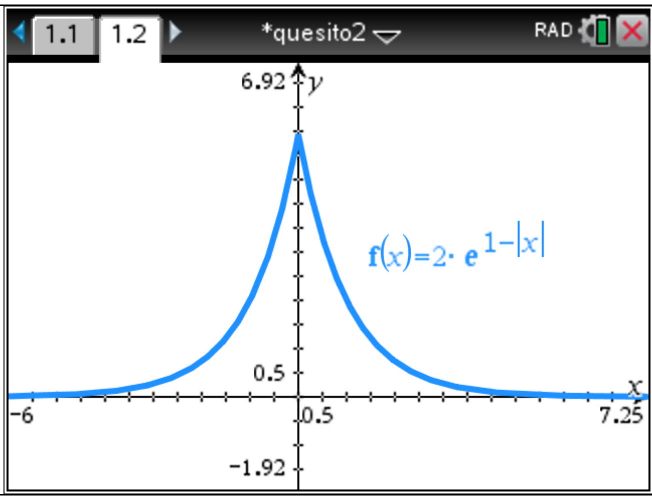
Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 2 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T[3] Italia - Teachers Teaching with Technology

Soluzione

La funzione $f(x)=2e^{1-|x|}$ ha per dominio **R**; è pari, positiva e ha per asintoto orizzontale l'asse delle ascisse.
È una funzione continua, ma in $x=0$ non è derivabile e ha un punto angoloso.
Con la calcolatrice grafica, si può ottenere immediatamente il grafico della funzione: $f(x)=2\cdot e^{1-|x|}$.
Per motivare questo grafico occorre fare un rapido studio di finzione, riportato di seguito.

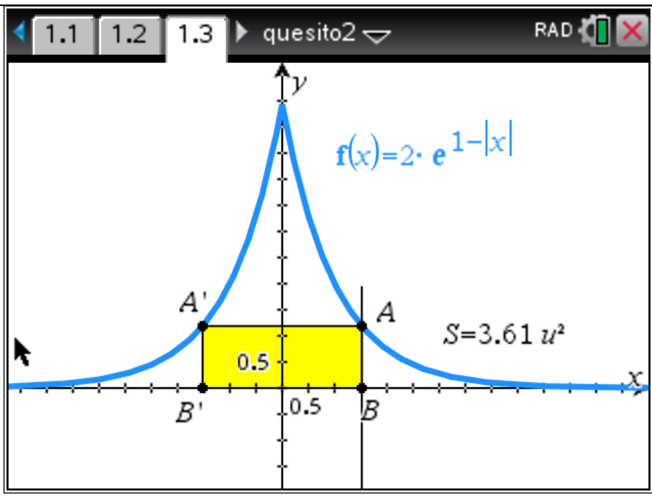


Per $x \geq 0$ si ottiene $f(x)=2e^{1-x}$ la cui derivata prima è $f'(x)=-2e^{1-x}$. Quindi la funzione è decrescente per $x \geq 0$ e tende a zero per $x \to +\infty$.
La derivata destra nel punto $x=0$ è pertanto $f'_+(x)=-2e$.

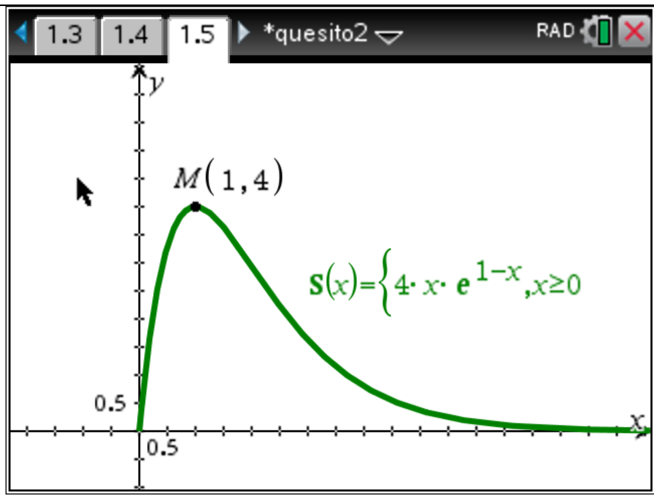
Per $x \geq 0$ la derivata seconda è $f''(x)=2e^{1-x}$, che è positiva. Pertanto, la funzione $f(x)$ è convessa in tutto il suo dominio (dato che è pari).

Inscriviamo un rettangolo con un lato sull'asse delle ascisse. Si ottiene la figura riportata a fianco utilizzando l'applicazione *Geometria* della calcolatrice grafica TI Nspire CX.
Si crea un punto A sul grafico della funzione (con $x \geq 0$). Si crea il simmetrico di A rispetto all'asse y. Si proietta A sull'asse delle ascisse usando lo strumento *Retta perpendicolare*.
Il rettangolo è simmetrico rispetto all'asse y.
Supponiamo $x \geq 0$.
Le coordinate del punto A sono $\left(x;2e^{1-x}\right)$.
L'area del rettangolo, per $x \geq 0$, è

$$S(x)=4xe^{1-x}$$



La calcolatrice grafica permette di tracciare immediatamente il grafico della funzione $S(x)$ che rappresenta l'area del rettangolo (vedi grafico a fianco) e permette di trovare il massimo (usando lo strumento *Analizza grafico>Massimo*).
Questa funzione ha il suo massimo relativo (e assoluto) per $x=1$.
Il massimo dell'area è 4.
In tale caso la base del rettangolo ha la stessa misura dell'altezza.
Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.



La derivata prima di $S(x)$ è quindi

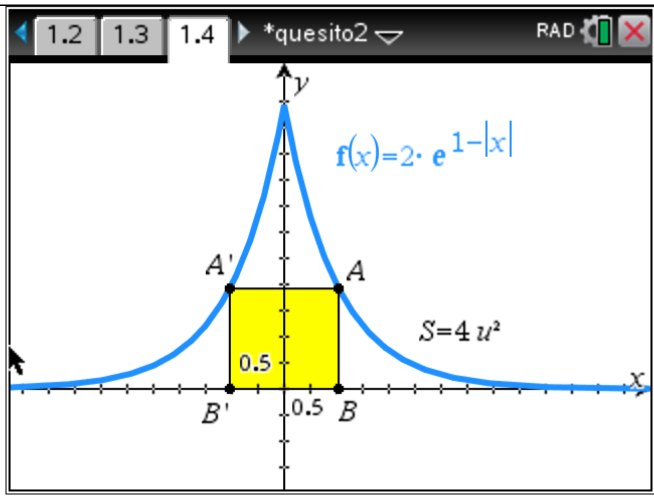
$$S'(x)=4\left(e^{1-x}-x\,e^{1-x}\right)=4e^{1-x}(1-x)$$

con $x\geq 0$.
Il massimo dell'area si ha per $x=1$ e vale $S(1)=4$.
In tal caso la base del rettangolo e l'altezza misurano 2. Quindi il rettangolo di area massima è il quadrato di lato 2.

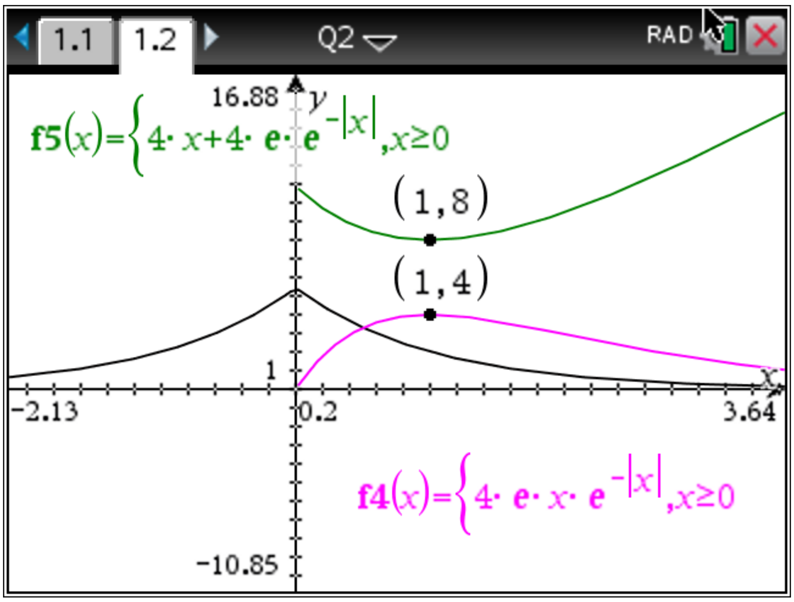
Il perimetro del rettangolo è dato da:
$p(x)=4x+4e^{1-x}$ (con $x\geq 0$).
La derivata prima è

$$p(x)=4-4e^{1-x}$$

Il massimo del perimetro si ha quindi per $x=1$. Quindi si ottiene lo stesso quadrato di lato 2.



In alternativa, si costruiscono le funzioni area e la funzione perimetro e si rappresentano i grafici per $x\geq 0$ nella stessa pagina grafica della calcolatrice.
Analizzando le curve si individuano un massimo per l'area e un minimo per il perimetro nella stessa ascissa $x=1$. Il perimetro minimo vale 8, come si osserva nel grafico a fianco.



Giudizio sul quesito
Il livello di difficoltà stimato del quesito è medio.
L'argomento è presente nel Quadro di Riferimento di Matematica e di solito viene svolto nella pratica didattica usuale.
Per la risoluzione del problema l'uso della calcolatrice grafica permette di disegnare rapidamente il grafico della funzione iniziale, il grafico della funzione area del rettangolo e il grafico della funzione che rappresenta il perimetro del rettangolo, determinandone rispettivamente il massimo e il minimo.