

Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

QUESITO 1 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T³ Italia - Teachers Teaching with Technology

La funzione $g(x)$ deve essere continua nel punto $x = 1$. Quindi i limiti $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ devono esistere, finiti ed essere uguali. Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x-3}$$

Si ottiene $3 - a = -\frac{b}{2}$ e quindi $b = 2a - 6$.

La funzione $g(x)$ deve essere derivabile nel punto $x = 1$.

La funzione è derivabile a sinistra in $x = 1$ e si ha $g'_-(1) = -2a$.

Calcoliamo il seguente limite, che rappresenta il rapporto incrementale destro nel punto $x = 1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

Tale limite deve esistere, finito e uguale alla derivata sinistra nel punto $x = 1$.

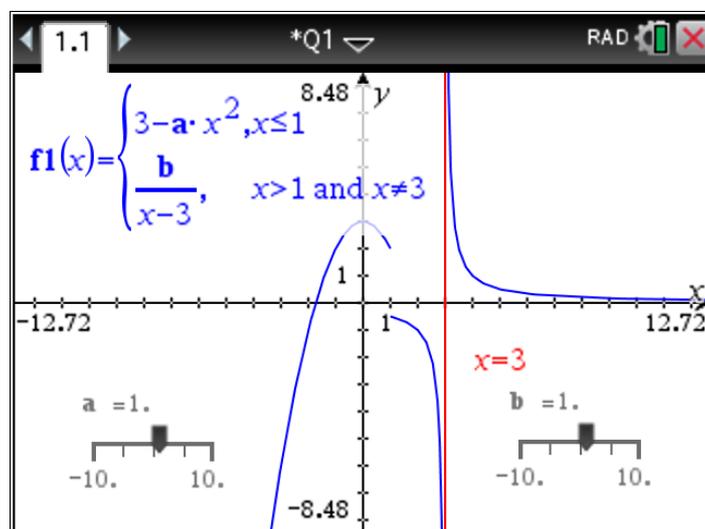
Si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b}{h-2} + \frac{b}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h-2} + \frac{1}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(h-2)} = -\frac{b}{4}$$

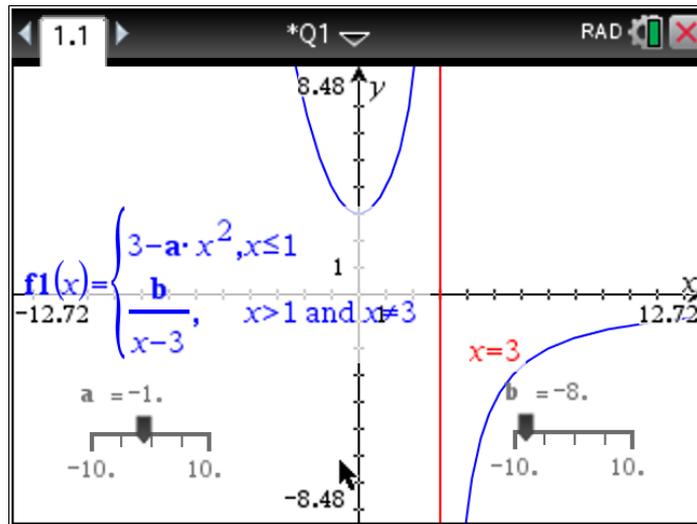
Quindi si ricava: $-2a = -\frac{b}{4} \rightarrow b = 8a$.

In definitiva si ha $a = -1$ e $b = -8$.

Con la calcolatrice grafica si potrebbe anche avere un approccio iniziale più intuitivo. In una pagina grafica si creano due cursori a scorrimento relativi ai due parametri a e b del quesito e si inserisce la funzione definita a tratti; il grafico presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa $x = 1$ per la quasi totalità dei valori dei parametri.



Variando i cursori è possibile “ottenere” la continuità del grafico in corrispondenza di $a = -1$ e $b = -8$.



In definitiva si ottiene la seguente funzione:

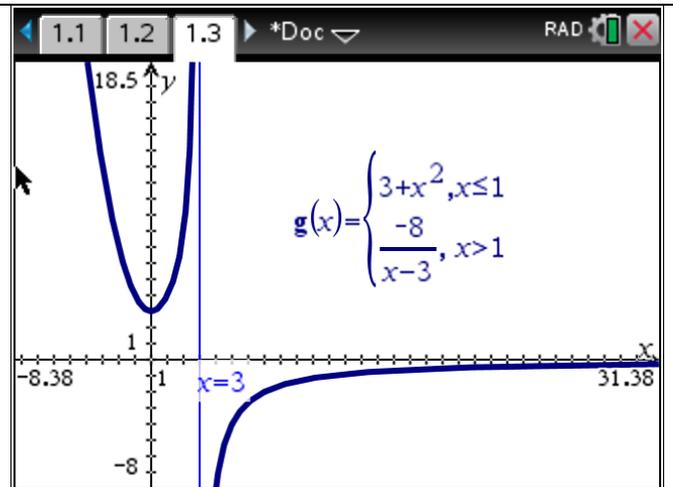
$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ -\frac{8}{x-3} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

La funzione ha un minimo relativo per $x = 0$ dove vale 3.

La funzione ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse e asintoto verticale la retta di equazione $x = 3$.

Il grafico è formato dall'unione di un arco di parabola e da due archi di iperbole equilatera. Il grafico della funzione $g(x)$ è riportato qui a fianco.

Tramite la calcolatrice, occorre definirla a tratti (vedi a fianco).



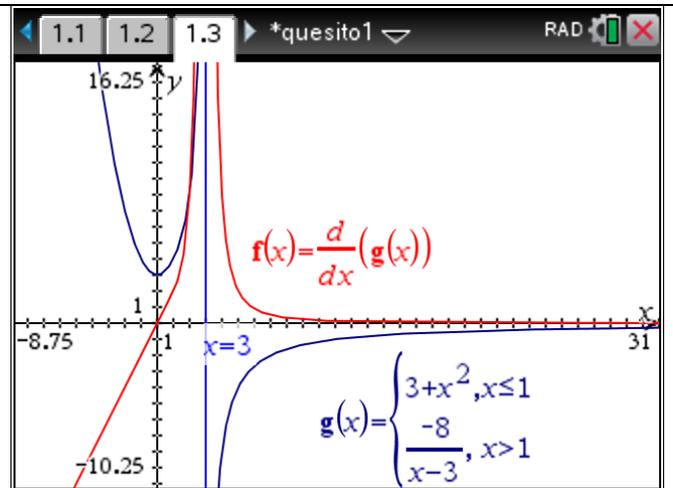
La derivata prima di $g(x)$ è:

$$f(x) = g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x \leq 1 \\ \frac{8}{(x-3)^2} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

Riportiamo qui a fianco il grafico della funzione (in blu) e della sua derivata prima (in rosso).

Sulla calcolatrice possiamo ottenere immediatamente il grafico della derivata prima, ponendo (vedi qui a fianco):

$$f(x) = \frac{d}{dx}(g(x))$$



Giudizio sul quesito

Il livello di difficoltà stimato del quesito è alto.

L'argomento è presente nel Quadro di Riferimento di Matematica e di solito viene svolto nella pratica didattica usuale.

Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica perché è immediato ottenere i grafici della funzione e della sua derivata prima e anche individuare, in modo grafico, i valori dei parametri a e b .