

## Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

### QUESITO 1 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T<sup>3</sup> Italia - Teachers Teaching with Technology

La funzione  $g(x)$  deve essere continua nel punto  $x = 1$ . Quindi i limiti  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  devono esistere, finiti ed essere uguali. Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x-3}$$

Si ottiene  $3 - a = -\frac{b}{2}$  e quindi  $b = 2a - 6$ .

La funzione  $g(x)$  deve essere derivabile nel punto  $x = 1$ .

La funzione è derivabile a sinistra in  $x = 1$  e si ha  $g'_-(1) = -2a$ .

Calcoliamo il seguente limite, che rappresenta il rapporto incrementale destro nel punto  $x = 1$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$$

Tale limite deve esistere, finito e uguale alla derivata sinistra nel punto  $x = 1$ .

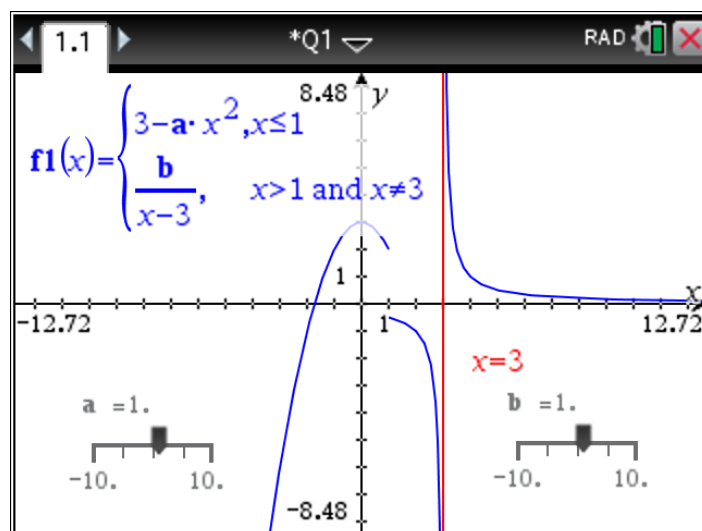
Si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{b}{h-2} + \frac{b}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h-2} + \frac{1}{2}}{h} = b \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2(h-2)} = -\frac{b}{4}$$

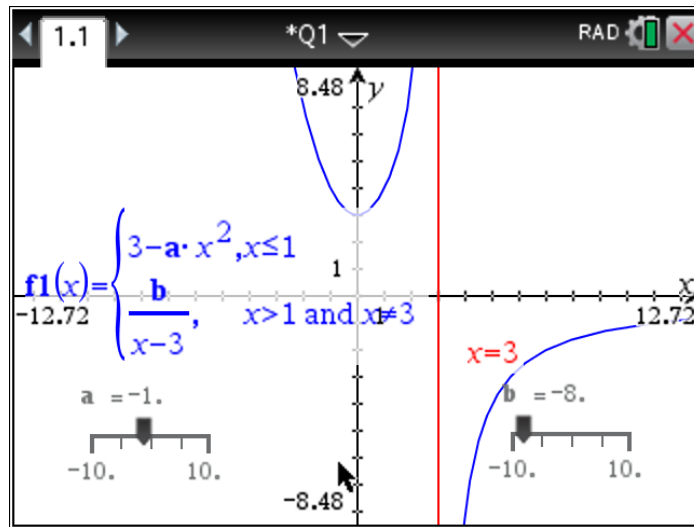
Quindi si ricava:  $-2a = -\frac{b}{4} \rightarrow b = 8a$ .

In definitiva si ha  $a = -1$  e  $b = -8$ .

Con la calcolatrice grafica si potrebbe anche avere un approccio iniziale più intuitivo. In una pagina grafica si creano due cursori a scorrimento relativi ai due parametri  $a$  e  $b$  del quesito e si inserisce la funzione definita a tratti; il grafico presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa  $x = 1$  per la quasi totalità dei valori dei parametri.



Variando i cursori è possibile “ottenere” la continuità del grafico in corrispondenza di  $a = -1$  e  $b = -8$ .



In definitiva si ottiene la seguente funzione:

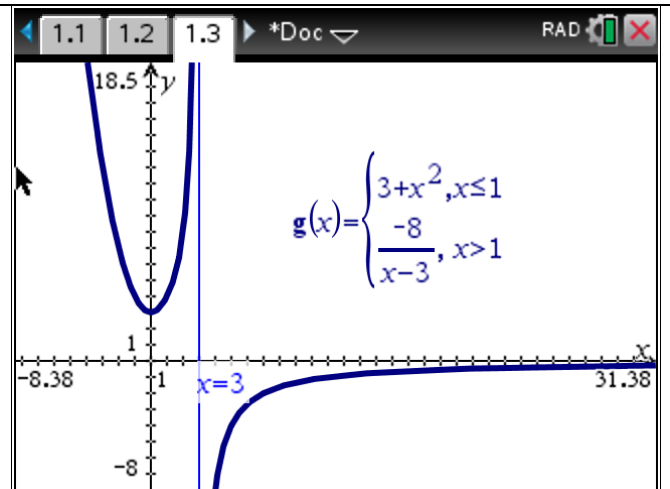
$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ -\frac{8}{x-3} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

La funzione ha un minimo relativo per  $x = 0$  dove vale 3.

La funzione ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse e asintoto verticale la retta di equazione  $x = 3$ .

Il grafico è formato dall'unione di un arco di parabola e da due archi di iperbole equilatera. Il grafico della funzione  $g(x)$  è riportato qui a fianco.

Tramite la calcolatrice, occorre definirla a tratti (vedi a fianco).



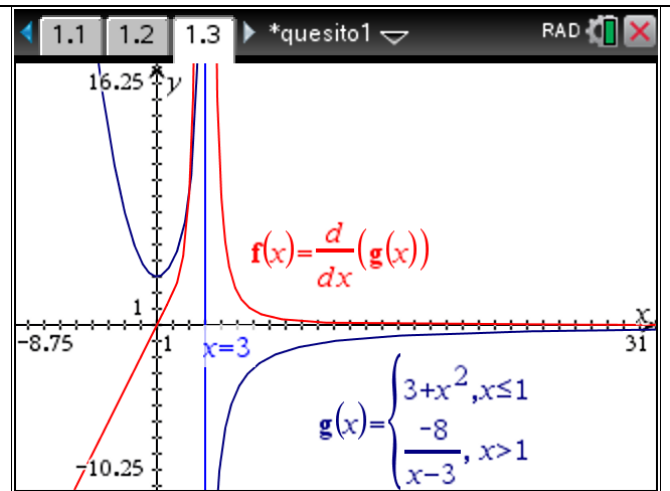
La derivata prima di  $g(x)$  è:

$$f(x) = g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x \leq 1 \\ \frac{8}{(x-3)^2} & \text{per } 1 < x < 3 \vee x > 3 \end{cases}$$

Riportiamo qui a fianco il grafico della funzione (in blu) e della sua derivata prima (in rosso).

Sulla calcolatrice possiamo ottenere immediatamente il grafico della derivata prima, ponendo (vedi qui a fianco):

$$f(x) = \frac{d}{dx}(g(x))$$



**Giudizio sul quesito**

Il livello di difficoltà stimato del quesito è alto.

L'argomento è presente nel Quadro di Riferimento di Matematica e di solito viene svolto nella pratica didattica usuale.

Per la risoluzione del problema è utile usare una calcolatrice grafica perché è immediato ottenere i grafici della funzione e della sua derivata prima e anche individuare, in modo grafico, i valori dei parametri  $a$  e  $b$ .