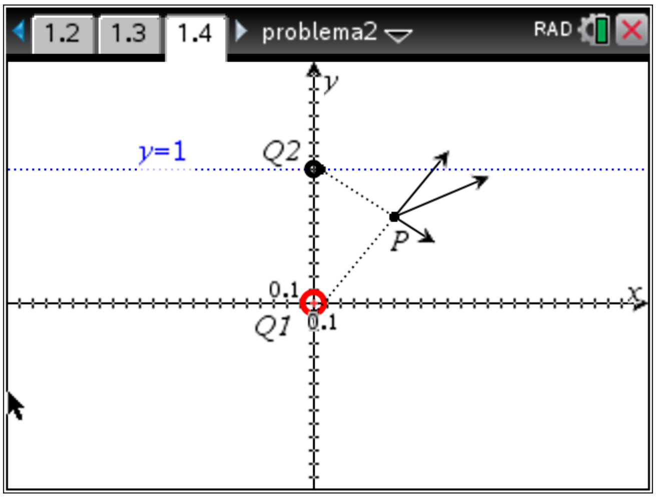
Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR - 28.02.2019

PROBLEMA 2 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T[3] Italia - Teachers Teaching with Technology

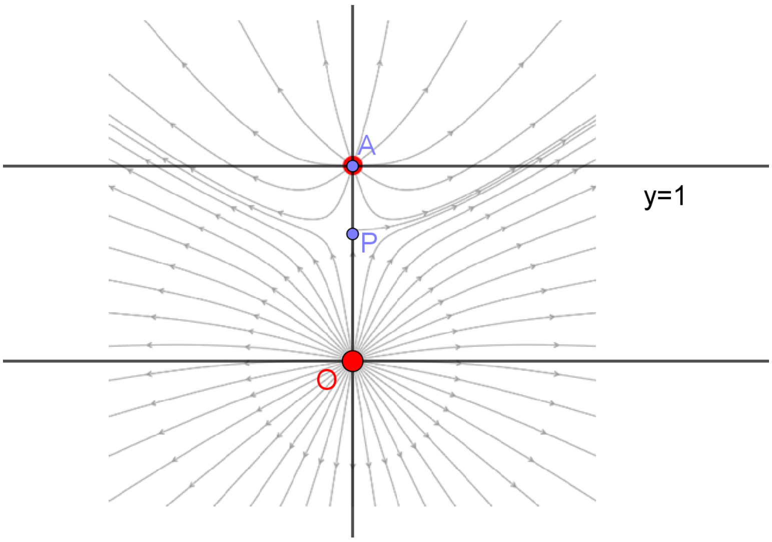
Punto 1

Il campo elettrico in un punto P del piano può essere rappresentato nel seguente modo:



Se Q_2 è posta nel punto $A(0,1)$, il campo elettrico è simmetrico rispetto all'asse y (asse passante per le due cariche generatrici del campo elettrico). Quindi il campo, nello spazio, ha una simmetria cilindrica rispetto all'asse y.

Nel piano Oxy le linee del campo elettrostatico sono indicate in modo approssimato nella seguente figura.



Il campo sarà nullo in un punto sull'asse y che giace tra le due cariche. Sia $P(0;y)$ tale punto. In P campi elettrici generati da Q_1 e da Q_2 devono essere opposti. Pertanto:

$$k\frac{4q}{y^2} = k\frac{q}{(1-y)^2}$$

da cui si ottiene

$$4(1-y)^2 = y^2$$

Si ricava

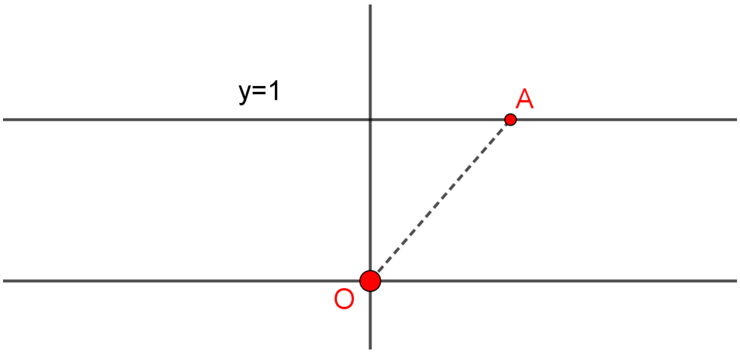
$$2|1-y| = |y|$$

L'unica soluzione accettabile è data da $2(1-y)=y$, che fornisce $y=\frac{2}{3}$.

Una terza carica *Q* positiva (molto piccola rispetto alle cariche generatrici del campo) posta nel punto $P\left(0;\frac{2}{3}\right)$ si trova in un punto di equilibrio instabile. Infatti, se la carica viene allontanata di pochissimo dal punto *P*, essa tende ad allontanarsi ancora di più.

La stessa situazione di equilibrio instabile si verifica se una terza carica *Q* negativa (molto piccola rispetto alle cariche generatrici del campo elettrico) viene posta nel punto *P*. Se la si allontana di pochissimo da *P*, tende a muoversi verso la carica più vicina e non torna nel punto *P*.

Punto 2



Se la carica Q_2 è vincolata a stare sulla retta di equazione $y=1$, allora chiamiamo $A(x;1)$ le coordinate del punto.

Nel piano *Oxy* l'energia potenziale elettrostatica del sistema formato dalle due cariche è una funzione in due variabili. A meno di una costante additiva, in un generico punto del piano possiamo scrivere:

$$U(x,y)=k\frac{Q_1Q_2}{r}$$

dove *r* è la distanza tra le due cariche generatrici del campo elettrico.

Poiché $y=1$, per ogni punto di questa retta l'energia potenziale elettrostatica è una funzione in una sola variabile:

$$U(x)=k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

Punto 3

La funzione *U*(*x*), a meno di una costante moltiplicativa positiva ($4kq^2$), ha un grafico affine a quello della funzione

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

il cui grafico è riportato di seguito.

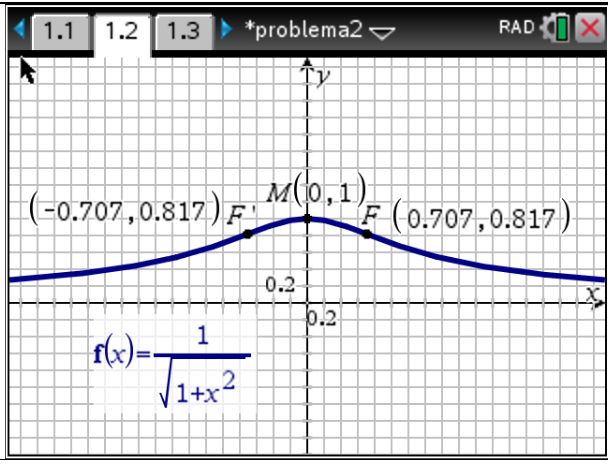
$f(x)$ è una funzione pari.

La derivata prima è $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Quindi il massimo si ha per $x = 0$ e vale 1.

La derivata seconda è $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.

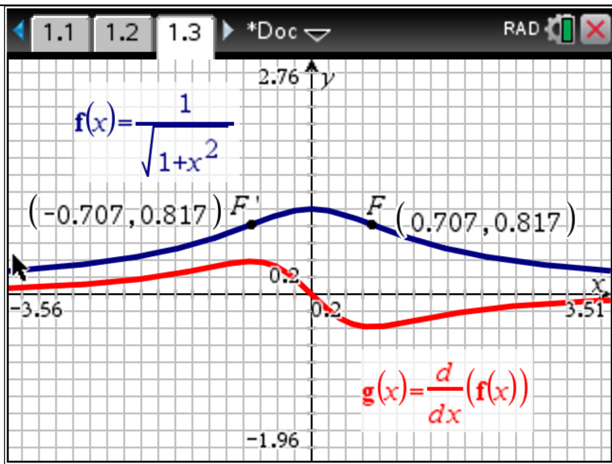
I flessi sono pertanto nei punti $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



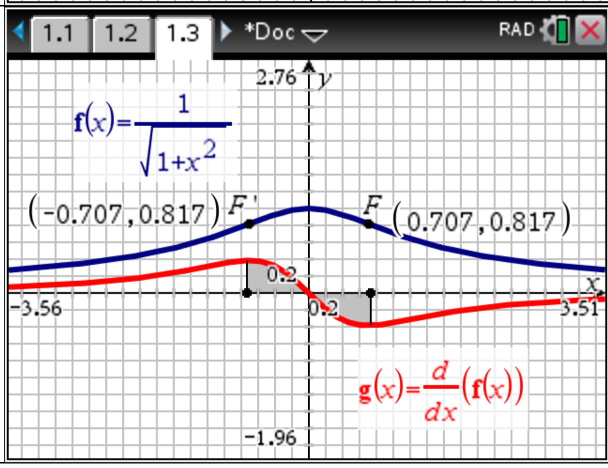
Punto 4

Riportiamo qui di seguito il grafico della derivata prima $U'(x)$ a meno di una costante moltiplicativa positiva.
La derivata prima è una funzione dispari (perché è la derivata di una funzione pari).
Per ottenere il grafico della derivata prima occorre scrivere

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$



Essendo la funzione $g(x) = \dfrac{d}{dx}\left(f(x)\right)$ dispari, si ha: $\int_{-m}^{m} g(x)\,dx = 0$ e questo è valido in generale per ogni intervallo simmetrico rispetto all'origine, non solo per $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Giudizio sul problema

Il problema ha un livello di difficoltà alto nella parte iniziale. Si tratta di un problema che parte dalla Fisica (i primi due punti sono di elettrostatica) e poi arriva alla Matematica. È quindi inizialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel Quadro di Riferimento di Fisica che in quello di Matematica.
Per la risoluzione di questo problema la calcolatrice grafica può essere utile per i punti 3 e 4 perché si possono tracciare immediatamente i grafici richiesti. Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti.