Esame di Stato 2019 – Liceo scientifico – 20 giugno 2019

Prova scritta di MATEMATICA e FISICA

PROBLEMA 2 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T[3] Italia - Teachers Teaching with Technology

Punto 1

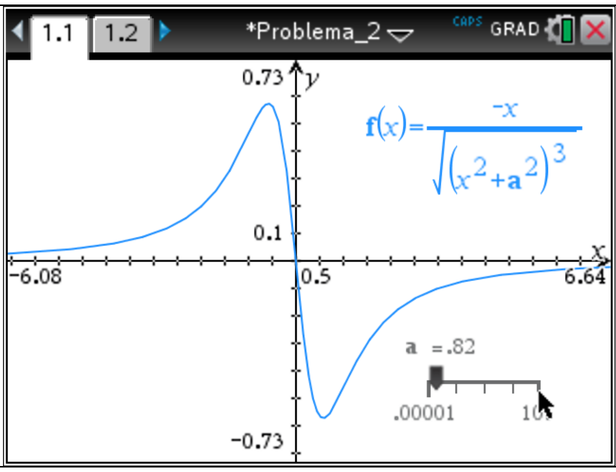
Il parametro *a* deve essere omogeneo all'istante di tempo *t*:	$[a] = [\mathrm{t}] = \mathrm{s}$
L'unità di misura di *k* si ottiene mediante formula inversa:	$[\mathrm{k}] = \left[\dfrac{\mathrm{B\ t^3}}{\mathrm{r\ t}}\right] = \dfrac{\mathrm{T\ s^2}}{\mathrm{m}}$
Il volume del condensatore è sede di una "corrente di spostamento" i_s prodotta dal campo elettrico variabile nel tempo.	$i_s = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$
La corrente di spostamento, al pari di una corrente di conduzione, produce un campo magnetico indotto la cui circuitazione è data dalla legge di Ampère-Maxwell:	$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0\, i_s$
Le linee del campo elettrico all'interno del condensatore sono parallele, escono dall'armatura carica positivamente ed entrano nell'armatura con carica negativa; le linee del campo magnetico indotto sono circonferenze concentriche centrate sull'asse di simmetria e giacenti su piani perpendicolari a questo. Campo elettrico e magnetico sono pertanto ortogonali tra di loro in ogni punto e in ogni istante.	

Punto 2

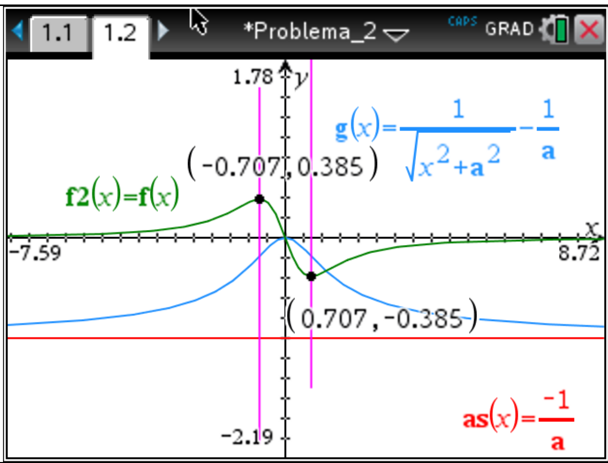
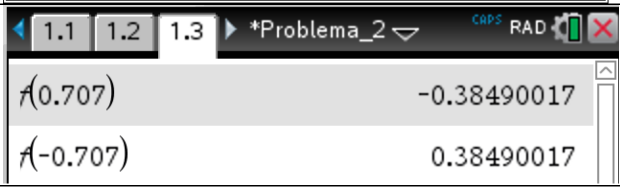
Data la geometria delle linee del campo magnetico indotto (sono delle circonferenze giacenti su piani paralleli alle armature del condensatore e aventi centro sull'asse di simmetria del condensatore) e considerando il modulo costante del campo magnetico lungo C, la circuitazione si ricava facilmente:	$\Gamma(\vec{B}) = \oint B\, dl = B \oint dl = 2\pi r\, B(r)$
Utilizzando la legge di Ampère-Maxwell e la definizione della corrente di spostamento otteniamo l'equazione:	$2\pi r\, B(r) = \mu_0\, \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$

Risolviamo rispetto alla derivata del flusso del campo elettrico:	$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}=\frac{2\pi r\, B(r)}{\mu_0\, \varepsilon_0}=\frac{2\pi k t r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$
Calcoliamo l'integrale della funzione potenza con esponente frazionario, ottenendo esattamente la formula del flusso riportata nel testo.	$$\Phi(\vec{E})=\int_0^t \frac{2\pi k t r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0 \sqrt{(t^2+a^2)^3}}=\frac{-\pi k r^2}{\mu_0\, \varepsilon_0}\int_0^t \frac{-2t}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$
Per ottenere l'espressione del campo elettrico dividiamo il flusso per l'area del cerchio delimitato da C:	$E=\frac{2k}{\mu_0\, \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{1}{a}\right)$
Calcoliamo la d.d.p.:	$\Delta V=-Ed=-\frac{2kd}{\mu_0\, \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{1}{a}\right)$
Calcoliamo il limite asintotico di $B(t)$ considerando la gerarchia degli infiniti:	$\lim\limits_{t\to+\infty}\lvert B(t)\rvert=0$
Il campo elettrico tende asintoticamente alla costante $\frac{2k}{\mu_0\, \varepsilon_0 a}$; questo comporta l'annullarsi della corrente di spostamento e quindi del campo magnetico da essa indotto.	

Punto 3

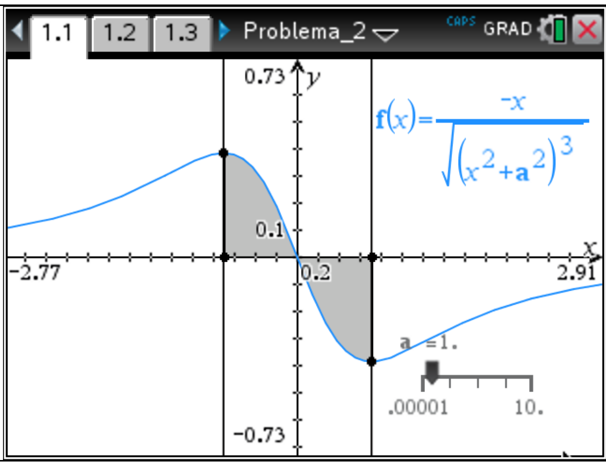
Nella scheda grafica della calcolatrice inseriamo un cursore a scorrimento (slider) per il parametro $a>0$ e otteniamo il grafico di $f(t)$, per t su tutto l'asse reale, al variare di a. Si nota che la funzione è dispari (è la derivata di una funzione pari).	
Calcoliamo le primitive di $f(t)$:	$$-\frac{1}{2}\int 2t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}=(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+C$$
Ponendo la costante additiva uguale -1/a si seleziona la primitiva che si annulla in $t=0$.	

<table>
<tr><td>Visualizziamo il grafico di F(t) (nella figura g(x) in blu), insieme al grafico di f(t), e individuiamo le caratteristiche: F(t), funzione pari, negativa con un massimo nell'origine, presenta un asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{a}$ e due punti di flesso simmetrici in corrispondenza dei punti stazionari di f(t). Ponendo $a = 1$ le ascisse dei flessi corrispondono ai valori

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0{,}707$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Calcoliamo i coefficienti angolari delle rette inflessionali, posto $a = 1$:</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Calcoliamo le pendenze algebricamente:</td><td>$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \mp\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 + a^2\right)^3}} = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$</td></tr>
</table>

Punto 4

<table>
<tr><td colspan="2">La funzione f(t) è la derivata di F(t); essendo F(t) una funzione pari, f(x) deve essere dispari; i punti di flesso di F(t) si trovano in corrispondenza dei punti stazionari di f(t).</td></tr>
<tr><td>Data la simmetria della funzione f(t) possiamo calcolare l'area come il doppio della regione di sinistra:

$$2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} f(t)dt = -\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} 2t(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dt = \left[\frac{2}{\sqrt{t^2+a^2}}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} = \frac{2}{a}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Essendo f(t) una funzione dispari, l'integrale definito calcolato su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo.</td><td>$$\int_{-b}^{b} f(t)dt = 0$$</td></tr>
</table>

Commento al problema 2

Il problema ha un livello di difficoltà alto, soprattutto per la parte iniziale di Fisica.
Questo problema, al contrario del primo, parte dalla Fisica per arrivare alla Matematica. Bisogna aver capito bene l'equazione di Maxwell sul campo magnetico indotto da un campo elettrico variabile e la corrente di spostamento. La parte di Matematica contiene diversi calcoli, ma è più affrontabile.
Con la calcolatrice grafica si potevano fare velocemente tutti i grafici richiesti.

