Esempio di Prova di MATEMATICA-FISICA - MIUR – 02.04.2019

PROBLEMA 1 - soluzione con la calcolatrice grafica TI-Nspire CX della Texas Instruments

Soluzione a cura di: Formatori T[3] Italia - Teachers Teaching with Technology

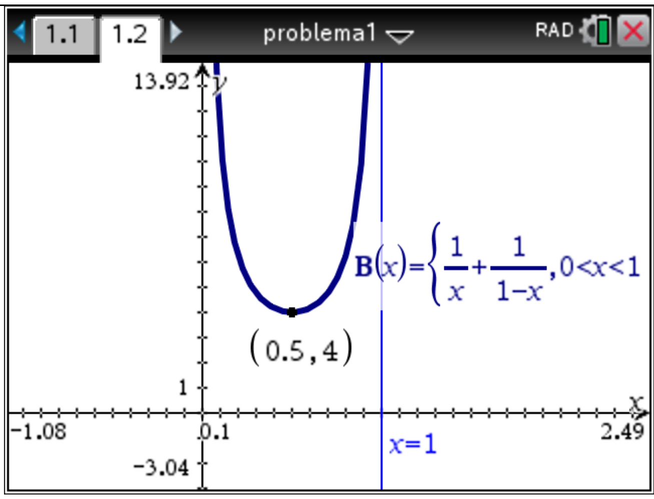
Punto 1

Nel punto *P*, per la legge di Biot-Savart, il modulo del campo magnetico è dato dalla somma dei contributi dei moduli dei campi magnetici (entrambi orientati nel verso positivo dell'asse *y*) generati dai due fili: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$.

L'unità di misura di *K* è $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}}$.

Il grafico di $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ è quello a fianco (è stato posto *K*=1).
Per simmetria il minimo deve essere in $x = ½$.
Se si deriva la funzione si ottiene lo stesso risultato. La derivata della funzione è:
$B'(x) = K\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

La derivata prima si annulla in $x = \frac{1}{2}$, che è un punto di minimo.

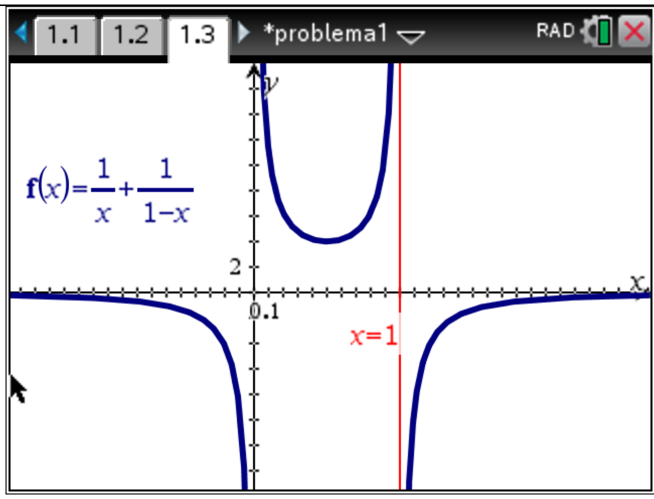


Punto 2

La forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$ agente sulla carica in moto è nulla, essendo il vettore velocità parallelo al vettore campo magnetico; quindi il moto della particella carica è rettilineo uniforme.

Nei punti dell'asse *x* esterni al segmento *OD* il campo magnetico, orientato nel verso negativo di *y*, è dato dalla differenza dei moduli dei campi magnetici, di verso opposto, generati dai due fili; ha modulo (e segno) dati dalla funzione $B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, la stessa espressione valida per $0 < x < 1$. Non esistono punti sull'asse *x* in cui il campo si annulla.

Il campo magnetico ha verso contrario all'asse y per $x < 0$ o per $x > 1$ e lo stesso verso dell'asse y per $0 < x < 1$.
Il grafico dell'intensità del campo magnetico (con il segno) è riportato qui a fianco, dove è stato posto $K = 1$.



Punto 3

La funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, di dominio $\mathbb{R} - \{0,1\}$, non interseca gli assi cartesiani, presenta due asintoti verticali di equazione $x = 0$ e $x = 1$ e ha l'asse delle ascisse come asintoto orizzontale.

La derivata prima $f'(x) = K\frac{2x-1}{(x-x^2)^2}$; quindi la funzione $f(x)$ presenta un punto stazionario in $\left(\frac{1}{2}, 4K\right)$.

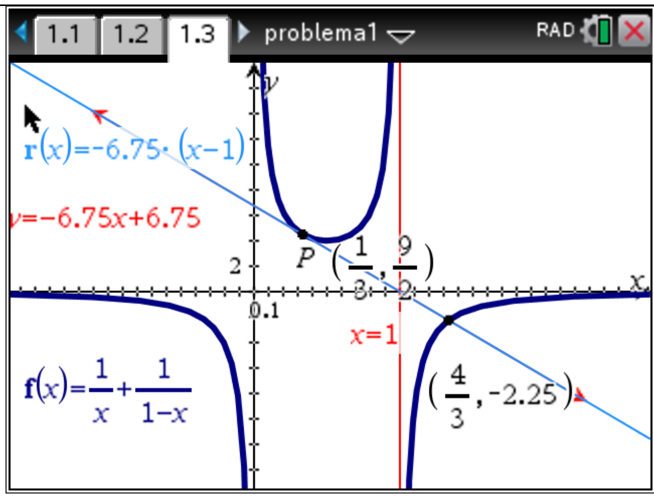
La derivata seconda è: $f''(x) = 2K \cdot \frac{3x^2-3x+1}{x^3(1-x)^3}$; quindi la funzione $f(x)$ non presenta punti di flesso.

Un possibile grafico della funzione, ottenuto per $K = 1$, è riportato nel seguito.

La retta r tangente alla curva in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ ha pendenza $m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{4}K$ ed equazione $y = \frac{27}{4}K(1-x)$.

Tale retta interseca la funzione in $\left(\frac{1}{3}, \frac{9}{2}K\right)$ (intersezione doppia) e in $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{4}K\right)$.

La funzione ha due asintoti verticali, le rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1$.
È strettamente decrescente e concava per $x < 0$ (dove è negativa); strettamente decrescente e convessa da 0 a 1/2; strettamente crescente e convessa per $½ < x < 1$ (positiva in (0, 1)); strettamente crescente e concava per $x > 1$ (e qui negativa).
Il punto P ha coordinate (1/3;9/2).
La tangente in $P\left(\frac{1}{3};\frac{9}{2}\right)$ ha equazione
$y - \frac{9}{2} = -\frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ cioè
$y = -\frac{27}{4}(x-1)$.



L'ulteriore punto di intersezione Q tra la tangente *t* e la curva si trova dal seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{27}{4}(x-1) \\ y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27x(x-1)^2 = 4 \\ y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-4)(3x-1)^2 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

Si ottiene Q(4/3;-9/4).

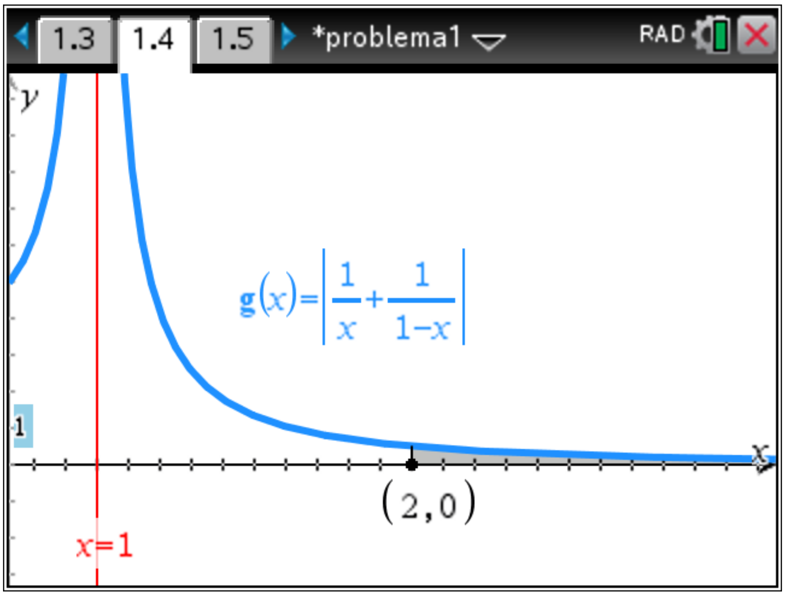
Punto 4

L'integrale $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = K \cdot [ln|x| - ln|1-x|]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 2Kln3$ rappresenta l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette verticali $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$.

Per $x \geq 2$, essendo la funzione negativa, si ha:

$$g(t) = \int_{2}^{t} K\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = K \cdot [ln|x-1| - ln|x|]_2^t = K \cdot \left(ln\left(\frac{t-1}{t}\right) + ln2\right)$$

Il limite $\lim_{t\to+\infty}\left[K\ ln\left(2\left(\frac{t-1}{t}\right)\right)\right] = K\ ln2$ rappresenta il limite a cui tende l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, dalla retta *x* = 2 e dall'asse delle ascisse per i valori di $x \geq 2$.



Commento sul problema 1

Il problema ha un livello di difficoltà alto.

Si tratta di un problema che parte dalla Fisica (primi due punti) e poi arriva alla Matematica.

È quindi parzialmente contestualizzato. I temi trattati sono presenti sia nel Quadro di Riferimento di Matematica che in quello di Fisica.

Per la risoluzione è di molto aiuto usare la calcolatrice grafica perché permette di tracciare immediatamente i vari grafici richiesti e osservarne le proprietà.

Occorre comunque motivare i grafici ottenuti e sviluppare i calcoli simbolici richiesti (perché le calcolatrici permesse non sono CAS).